BTZ黑洞视界上的共形场论

王晶波
高能所理论室

2016.07

黑洞熵的微观解释

- 到目前为止，有许多种方法解释黑洞的熵，比如
  - 弦论（Strominger Vafa 1996，$\cdots$），
  - 圈量子引力（Rovelli 1996，$\cdots$, Ashtakar et al,1997,）
  - 纠缠熵（Bombelli et al 1996, $\cdots$, Ryu-Takayanagi 2006,）
  - $\cdots$.
- “普适性问题”：许多种不同的方法（微观自由度完全不同）给出同样的结果；GR中许多种不同的黑洞都满足Bekenstein-Hawking面积公式。
- Carlip：2维理论的共形对称性，与微观自由度的细节无关(Carlip 1995, Strominger 1997, Birmingham et al 1998, $\cdots$)。

Cardy 公式 I

- 共形对称性在2维是无穷维的，全纯与反全纯微分拓扑变换$z \to f(z), \bar{z} \to \bar{f}(\bar{z})$,可以由“Virasoro 生成元” $L[\xi]$ 和$\bar{L}[\bar{\xi}]$生成。两个守恒荷$L_0 = L[\xi_0]$ 和$\bar{L}_0 = \bar{L}[\bar{\xi}_0]$对应着常数的全纯与反全纯变换，同时也是质量与角动量的线性叠加.
- Virasoro 代数，

$$\{L[\xi], L[\eta]\} = L[\eta\xi' - \xi\eta'] + \frac{c}{48\pi}\int dz(\eta'\xi'' - \xi'\eta''),$$
$$\{L[\xi], \bar{L}[\bar{\eta}]\} = 0, \qquad (1)$$
$$\{\bar{L}[\bar{\xi}], \bar{L}[\bar{\eta}]\} = \bar{L}[\bar{\eta}\bar{\xi}' - \bar{\xi}\bar{\eta}'] + \frac{\bar{c}}{48\pi}\int d\bar{z}(\bar{\eta}'\bar{\xi}'' - \bar{\xi}'\bar{\eta}'').$$

其中$c, \bar{c}$称为中心荷,决定了普通微分拓扑代数的中心扩张。

Cardy 公式 II

- 考虑一个共形场论，其两个守恒荷$L_0, \bar{L}_0$的最小本征值都是非负的数$\Delta_0, \bar{\Delta}_0$. 1986年，Cardy发现了一个公式：$L_0, \bar{L}_0$在本征值$\Delta, \bar{\Delta}$ 的态密度的渐进行为是

$$\ln \rho(\Delta, \bar{\Delta}) \sim 2\pi\{\sqrt{(c - 24\Delta_0)\Delta/6} + \sqrt{(\bar{c} - 24\bar{\Delta}_0)\bar{\Delta}/6}\}. \tag{2}$$

  也就是说，熵（微观状态数）由共形对称性基本决定，与动力学细节无关。
- 黑洞即不是二维的，也不是共形不变的，但是，在视界附近，由于强大的引力蓝移效应，可以近似的看作2维的（$r - t$平面）和共形不变的。

Cardy 公式 III

- 应用近视界的2维共形对称性，Carlip 发展了一种方法，用于解释任意维度时空中的黑洞的熵，详见“arXiv:1207.1488, Effective conformal descriptions of black hole entropy; a review”.

通过"AdS_3/CFT_2"计算黑洞的熵 I

- 首先介绍一下BTZ黑洞，

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + N^{-2} dr^2 + r^2 (d\varphi + N_\varphi dv)^2, \tag{3}$$

其中

$$N^2(r) = -8GM + \frac{r^2}{L^2} + \frac{16G^2J^2}{r^2}, \quad N_\varphi = -\frac{4GJ}{r^2}. \tag{4}$$

黑洞的视界位置

$$r_\pm^2 = 4GML^2 (1 \pm \sqrt{1 - \frac{J^2}{L^2M^2}}). \tag{5}$$

通过"AdS_3/CFT_2"计算黑洞的熵 II

- 1986年，Brown 和Henneaux 就发现：AdS的渐进对称群由两个Virasoro 代数生成，也就是说，在无穷远边界上存在两个共形场论（“左移”和“右移”），并且中心荷是

$$c = \bar{c} = \frac{3L}{2G}, \tag{6}$$

可以看作"AdS_3/CFT_2"的先声。

通过" AdS_3/CFT_2 "计算黑洞的熵 III

- 在这个基础上，Strominger (hep-th/9712251) 应用Cardy公式计算了BTZ黑洞的熵，其中

$$\Delta_0 = \frac{ML+J}{2}, \quad \bar{\Delta}_0 = \frac{ML-J}{2}, \tag{7}$$

所以代入Cardy公式，得到

$$S = \ln \rho(\Delta_0, \bar{\Delta}_0) \sim 2\pi\{\sqrt{c\Delta_0/6} + \sqrt{\bar{c}\bar{\Delta}_0/6}\} = \frac{2\pi r_+}{4G}. \tag{8}$$

- 上面的Cardy公式可以认为是在微正则系综，还有一个相应的正则系综的公式

$$\ln \rho(T_L, T_R) \sim \frac{\pi^2 L}{3}(c_{eff} T_L + \bar{c}_{eff} T_R). \tag{9}$$

通过" AdS_3/CFT_2 "计算黑洞的熵 IV

- 对于BTZ黑洞，有

$$T_L = \frac{r_+ - r_-}{2\pi L^2}, \qquad T_R = \frac{r_+ + r_-}{2\pi L^2}, \tag{10}$$

满足

$$\frac{1}{T_L} + \frac{1}{T_R} = \frac{2}{T_H}. \tag{11}$$

代入(8)可得

$$S = \frac{2\pi r_+}{4G}. \tag{12}$$

3维AdS时空中的广义相对论 I

- 3维GR是没有局域自由度的，所以，可以写成拓扑场论Chern-Simons理论的形式，特别的，对于AdS时空，有

$$I_{GR} = -\frac{1}{8\pi G}\int e^a \wedge (d\omega_a + \frac{1}{2}\epsilon_{abc}\omega^b \wedge \omega^c) - \frac{1}{6L^2}\epsilon_{abc}e^a \wedge e^b \wedge e^c = I_{CS}[A^{(+)}] - I_{CS}[A^{(-)}], \tag{13}$$

其中

$$A^{(\pm)a} = \omega^a \pm \frac{1}{L}e^a, \tag{14}$$

3维AdS时空中的广义相对论 II

而$A^{(\pm)} = A^{(\pm)a}T_a$是SO(2,1)的规范势,Chern-Simons理论的作用量是

$$I_{CS} = \frac{k}{4\pi}\int Tr\{A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A\}, \tag{15}$$

其中

$$k = -\frac{L}{4G}. \tag{16}$$

3维AdS时空中的广义相对论 III

- 从作用量可以得到CS方程

$$F^{\pm} = dA^{(\pm)} + A^{(\pm)} \wedge A^{(\pm)} = 0 \tag{17}$$

等价于Einstein方程。上面的场方程说明联络是平坦的，也就是局域的都可以写成

$$A = g^{-1} dg. \tag{18}$$

- 正则分析，Poisson括号

$$\{A_i(x), A_j(y)\} = \frac{2\pi}{k} \varepsilon_{ij} \delta(x - y), \tag{19}$$

也就是说，A_i 既是位置也是动量。

带边流形上的Chern-Simons理论 I

- 首先，为了使作用量(15)的变分有意义，需要添加一定的边界项以及边界条件。对于CS理论来说，由于联络A本身既是位置变量也是动量变量，所以需要额外的信息。通常的做法是在边界∂M上选择一定的复结构$(z, \bar{z})$，然后固定一个分量，那么边界项可以选为

$$I_{bd} = \frac{k}{4\pi} \int_{\partial M} TrA_z A_{\bar{z}}, \tag{20}$$

再加上边界条件

$$\delta A_z|_{\partial M} = 0, \quad or \quad \delta A_{\bar{z}}|_{\partial M} = 0. \tag{21}$$

带边流形上的Chern-Simons理论 II

- 在规范变换

$$\bar{A} = g^{-1}Ag + g^{-1}dg \tag{22}$$

总的规范不变的作用量为

$$(I_{CS} + I_{bd})[\bar{A}] + kI^{+}_{WZW}[e, \bar{A}] = (I_{CS} + I_{bd})[A] + kI^{+}_{WZW}[g^{-1}, A] \tag{23}$$

其中WZW项为

$$I^{+}_{WZW}[g^{-1}, A_z] = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial M} Tr(g^{-1}\partial_z g g^{-1}\partial_{\bar{z}} g - 2g^{-1}\partial_{\bar{z}} g A_z) + \frac{1}{12\pi}\int_M Tr(g^{-1}dg)^3, \tag{24}$$

带边流形上的Chern-Simons理论 III

- 换言之，规范变换参数g在边界上变成动力学变量，并且由手征WZW理论来描述，而这正是一个共形场论。这些自由度“would-be-gauge d.o.f”的存在是由于边界条件的存在破缺了规范对称性.

通过WZW理论的方法 I

- 下面介绍另外一种应用共形场WZW理论的方法（arXiv:gr-qc/0503022）：从度规的Schwarzschild 形式出发，

$$ds^2 = -N^2dt^2 + N^{-2}dr^2 + r^2(d\varphi + N^\varphi dv)^2. \tag{25}$$

转换到以固有长度ρ以及两个类光坐标$u, v = t/L \pm \varphi$的坐标系，度规形式为

$$ds^2 = -4GL(L^+du^2+L^-dv^2)+L^2d\rho^2-(L^2e^{2\rho}+16G^2L^+L^-e^{-2\rho})dudv \tag{26}$$

通过WZW理论的方法 II

其中

$$L^{\pm} = \frac{(r_+ \pm r_-)^2}{16GL}. \tag{27}$$

在这种坐标下，CS联络取简单的形式

$$\begin{aligned} A^{(+)} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}d\rho & -\frac{4G}{L}L^+ e^{-\rho} du, \\ -e^{\rho} du & -\frac{1}{2}d\rho \end{pmatrix}, \\ A^{(-)} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}d\rho & -e^{\rho} dv, \\ -\frac{4G}{L}L^- e^{-\rho} dv & \frac{1}{2}d\rho \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{28}$$

首先注意到，这两个联络满足

$$A_v^{(+)} = 0, \quad A_u^{(-)} = 0, \tag{29}$$

通过WZW理论的方法 III

满足CS的边界条件，所以在边界上可以得到两个手征性的WZW项。由于这两个WZW项都是手征性的，根据Polyakov-Wiegmann 公式

$$I[g_1 g_2] = I[g_1] + I[g_2] + \frac{1}{\pi}\int tr(g_1^{-1}\partial_z g_1 \partial_{\bar{z}} g_2 g_2^{-1}), \qquad (30)$$

可以合成一个非手征性的WZW理论

$$\begin{aligned} I &= kI^{+}_{WZW}[g_1^{-1}, A_v^{(+)} = 0] - kI^{-}_{WZW}[g_2^{-1}, A_u^{(-)} = 0] \\ &= kI_{WZW}[g = g_1 g_2^{-1}]. \end{aligned} \qquad (31)$$

也就是说，到目前为止，我们得到了边界上的一个整体的非手征的WZW理论。

通过WZW理论的方法 IV

- 再考虑联络(28)的其他性质，当ρ很大的时候，可以看出$A_u^{(+)} \sim const.T^-$, $A_v^{(-)} \sim const.T^+$, 若要保持这种性质，需要规范变换满足

$$Tr(\partial_v g g^{-1} T^-) = 1, \quad Tr(g^{-1}\partial_u g T^+) = 1. \tag{32}$$

下面我们考虑具体的群元，任何一个SO(2,1)的群元都可以写成

$$g(x,y,\Psi) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\Psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-\Psi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}y & 1 \end{pmatrix}, \tag{33}$$

通过WZW理论的方法 V

代人WZW项(24)可以得到

$$kI_{WZW} = \frac{k}{4\pi}\int_{\partial M} dudv\left(\frac{1}{2}\partial_u\Psi\partial_v\Psi - e^{\Psi}\partial_u x\partial_v y\right), \tag{34}$$

而约束(32)变成

$$Tr(\partial_v g g^{-1}T^-) = e^{\Psi}\partial_v y = 1, \quad Tr(g^{-1}\partial_u g T^+) = e^{\Psi}\partial_u x = 1. \tag{35}$$

将约束代人方程可得

$$kI_{WZW} = \frac{k}{8\pi}\int_{\partial M} dudv\left(\partial_u\Psi\partial_v\Psi - 2e^{-\Psi}\right), \tag{36}$$

通过WZW理论的方法 VI

正好是Liouville理论的作用量的形式,

$$I_{Liou} = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial M}\sqrt{q}d^2x(q^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi + QR\phi + 4\pi\mu e^{2b\phi}). \quad (37)$$

从而得到理论的中心荷为

$$c = 1 + 6(b + 1/b)^2 \approx 48\pi\frac{k}{8\pi} = \frac{3L}{2G}. \quad (38)$$

- 方法的问题:
  - 所选用的坐标无法应用到视界上,
  - 用到无穷远处的边界条件,
  - 得到一个共形场论,而且中心荷同样是$c = \frac{3L}{2G}$,所以应该只得到熵的一半.

CS联络 I

- BTZ黑洞的度规为

$$ds^2 = -N^2 dv^2 + 2dvdr + r^2(d\varphi + N^\varphi dv)^2. \qquad (39)$$

选择如下的类光余标架，

$$l = -\frac{1}{2}N^2 dv + dr, \quad n = -dv, \quad m = rN^\varphi dv + rd\varphi, \qquad (40)$$

可以计算出CS联络的形式

$$A^{-(\pm)} = -(N^\varphi \mp \frac{1}{L})dr - \frac{N^2}{2}d(\varphi \pm \frac{v}{L}), \quad A^{+(\pm)} = -d(\varphi \pm \frac{v}{L}),$$
$$A^{2(\pm)} = r(N^\varphi \pm \frac{1}{L})d(\varphi \pm \frac{v}{L}). \qquad (41)$$

CS联络 II

定义新的变量,

$$w = \varphi - \frac{v}{L}, \quad \bar{w} = \varphi + \frac{v}{L}, \quad c_{\pm}(r) = \frac{r}{L}(LN^{\varphi} \pm 1). \qquad (42)$$

从(41)可以看出

$$A_w^{(+)} = 0, \quad A_{\bar{w}}^{(-)} = 0, \qquad (43)$$

具有和(29)一样的形式,所以同样可以得到两个手征性相反的WZW项。

边界 I

- 选择类时面$r = r_0$,最后取$r_0 \to r_+$,就到了视界。$r = r_0$上的线元是

$$d\tilde{s}^2 = \frac{L^2}{4}[(c_+^2 - N^2)d\bar{w}^2 - 2(c_+c_- - N^2)d\bar{w}dw + (c_-^2 - N^2)dw^2], \tag{44}$$

所以度规是

$$q_{ab} = \frac{L^2}{4}\begin{pmatrix} c_+^2 - N^2 & -(c_+c_- - N^2) \\ -(c_+c_- - N^2) & c_-^2 - N^2 \end{pmatrix}. \tag{45}$$

边界 II

以及

$$q = -\frac{N^2 L^4 (c_+ - c_-)^2}{16} = -\frac{N^2 L^2 r_0^2}{4}, \tag{46}$$

满足当$N^2 \to 0$趋于0，也就是趋于类光面. 逆度规是

$$q^{ab} = -\frac{1}{N^2 r_0^2} \begin{pmatrix} c_-^2 - N^2 & -(c_+ c_- - N^2) \\ -(c_+ c_- - N^2) & c_+^2 - N^2 \end{pmatrix}. \tag{47}$$

由此得到的Ricci标量是0，$R = 0$.

规范变换 I

- 我们希望规范变换能够保持边界条件，这样就限制了群元的选取。所以首先考虑选择怎样的边界条件。注意我们关注是视界而非无穷远的边界。首先我们考虑“左移”的一支。在视界附件，定义小量$\epsilon = r - r_+$, 那么$N^2 \approx 2\kappa\epsilon$,并且

$$A^-_{\bar{w}} \approx -\kappa\epsilon. \tag{48}$$

由于这个关系反映了视界的性质，我们希望规范变换能够保持这个关系，也就是

$$\bar{A}^-_{\bar{w}} \sim O(\epsilon) = C_1\epsilon. \tag{49}$$

规范变换 II

假设规范群元具有下面的形式

$$g(x,y,\Psi)=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{\sqrt{2}}x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-\Psi/2} & 0\\ 0 & e^{-\Psi/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}y & 1\end{pmatrix}, \tag{50}$$

在规范变换(22)下,

$$\bar{A}^{-}=e^{\Psi}(A^{-}-A^{2}x+A^{+}x^{2}/2+dx), \tag{51}$$

由于A^2, A^+在视界上都是有限的,为了保持边界条件(49),我们需要

$$x(r,\bar{w})=\epsilon h(\bar{w}), \tag{52}$$

规范变换 III

其中$h(\bar{w})$是一个在视界上有限的函数，并且$\Psi(r,\bar{w})$在视界上也是有限的.
其他两个分量的变换为

$$\begin{aligned}\bar{A}^2 &= A^2(1-e^{\Psi}yx) - A^{+}x(1-e^{\Psi}yx/2) + A^{-}e^{\Psi}y \\ &\quad + d\Psi + e^{\Psi}ydx, \\ \bar{A}^{+} &= A^{+}e^{-\Psi}(1-e^{\Psi}yx/2)^2 + A^2y(1-e^{\Psi}yx/2) \\ &\quad + A^{-}e^{\Psi}y^2/2 + yd\Psi + dy + y^2e^{\Psi}dx/2.\end{aligned} \tag{53}$$

由于这两个分量原来在视界上是有限的，我们希望在变换后还是有限的，所以

$$y(r_+) = finite, \quad \Psi(r=r_+) = finite. \tag{54}$$

规范变换 IV

那么作用量(34)中的第二项在趋于视界的时候

$$e^{\Psi}\partial_a x \partial_b y \backsim \epsilon \to 0, \tag{55}$$

也就是说，在视界上，我们无法得到Liouville形式的理论，而是一个自由的标量场理论，而它的中心荷是1，对于解释黑洞的熵来说太小了。

- 同样的结果适用于右移分支。

规范变换 V

- 从作用量上看，

$$
\begin{aligned}
kI_{WZW} &= \frac{k}{8\pi}\int_{\partial M}\sqrt{q}dwd\bar{w}q^{\bar{w}\bar{w}}(\partial_{\bar{w}}\Psi\partial_{\bar{w}}\Psi-\epsilon) \\
&= \frac{k}{8\pi}\int_{\partial M}dwd\bar{w}\frac{2\pi^2L^3T_L^2}{Nr_+}(\partial_{\bar{w}}\Psi\partial_{\bar{w}}\Psi-\epsilon),
\end{aligned} \tag{56}
$$

趋于视界时，$N^2\sim\epsilon\to 0$是发散的。

结论 I

- 如果应用Eddington坐标的话，可以研究在视界上的性质。当到视界上的时候，Liouville作用量的第二项是没有的，从而得到的是自由标量场，其中心荷太小，不足以解释黑洞的熵。
- 我们将“左移”和“右移”两个共形场分开考虑，即使按照Carlip的方法合成一个共形场，按照群元的合成关系，得到的依然是自由标量场。
- 在视界附近，能不能写成Liouville作用量的形式需要考虑更多的边界条件。存不存在一个c流？

谢谢！